Паросочетания и покрытия

Рассмотрим семейство подмножеств $S_1, \ldots, S_n$ конечного множества X. Когда из S_i можно выбрать по элементу так, чтобы выбранные элементы были различны? Естественно, должно выполняться следующее:

Условие Холла: объединение любых k множеств семейства содержит не менее k элементов.

В задаче 8 мы докажем Лемму Холла: условие Холла не только необходимо, но и достаточно.

Построим двудольный граф $G = (A \cup B, E)$: вершины A отвечают множествам S_i, вершины B элементам X, ребро проводится если элемент принадлежит множеству.

Определение. Рассмотрим двудольный граф G. **Паросочетание** в G это множество рёбер без общих концов. **Вершинное покрытие** это множество вершин $C \subseteq A \cup B$, содержащее хотя бы один конец каждого ребра.

Теперь можно забыть про подмножества и сформулировать задачу для произвольного двудольного графа.

1. а) Переформулируйте задачу о выборе различных представителей в терминах паросочетаний.

б) Переформулируйте условие Холла в терминах покрытий и докажите, что оно необходимо.

Обозначим за $\nu(G)$ размер максимального паросочетания, за $\tau(G)$ — минимального вершинного покрытия.

2. а) Докажите, что $\nu(G) \leqslant \tau(G)$ для любого графа. б) Приведите пример графа, в котором $\nu(G) < \tau(G)$.

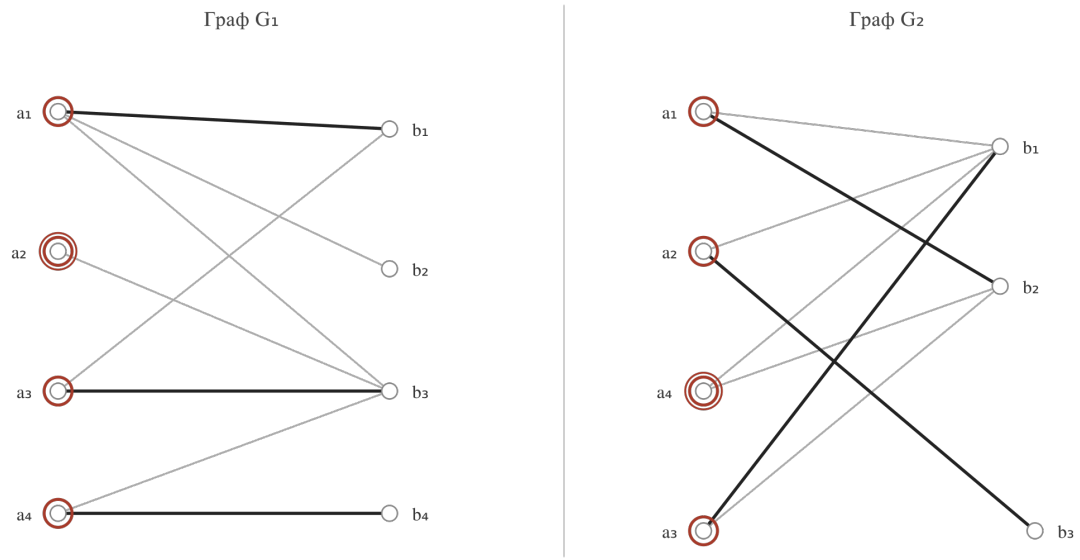
В задачах 3–7 мы докажем, что в двудольном графе $\nu(G) = \tau(G)$, и выведем из этого Лемму Холла.

* * *

Определение. Паросочетание M и вершинное покрытие C **согласованны**, если из каждого ребра M ровно один конец лежит в C. **Дефектом** пары (M, C) называется число $f = |C| - |M|$.

3. Покажите, что дефект равен числу свободных вершин в C.

4. На рисунке изображены двудольные графы. Ребра паросочетаний выделены, вершины покрытия обведены.



а) В графе G_1 найдите согласованную пару с дефектом 0, добавив в паросочетание ребро a_2b_3.

б) В графе G_2 найдите согласованную пару с дефектом 0, убрав из покрытия свободную вершину a_4.

Добавление ребра или удаление вершины запускает цепную реакцию перестроек. Если она останавливается, получается новая согласованная пара с меньшим дефектом. Формализуем эти операции.

Определение. Рассмотрим согласованную пару (M, C).

- Рассмотрим путь в G нечетной длины, рёбра которого поочерёдно принадлежат $\bar{M}$ и M, вершины чередуются между C и $V \setminus C$, а оба конца свободны. Положим $M_P = M \triangle E(P)$.
- Рассмотрим независисмое подмножество $S \subseteq C$, такое что каждое $\bar{M}$-ребро из S в $V \setminus C$ продолжается M-ребром обратно в S. Положим $C_S = (C \setminus S) \cup \{M\text{-партнёры вершин } S\}$.

5. Покажите, что обе операции дают согласованную пару. Как меняется дефект?

6. а) Докажите, что для согласованной пары с $f > 0$ применима одна из операций, уменьшающая дефект.

Указание: рассмотрите множество вершин, достижимых из свободной по чередующимся путям.

б) **Лемма Берже** Паросочетание максимально тогда и только тогда, когда к нему не применима операция 1.

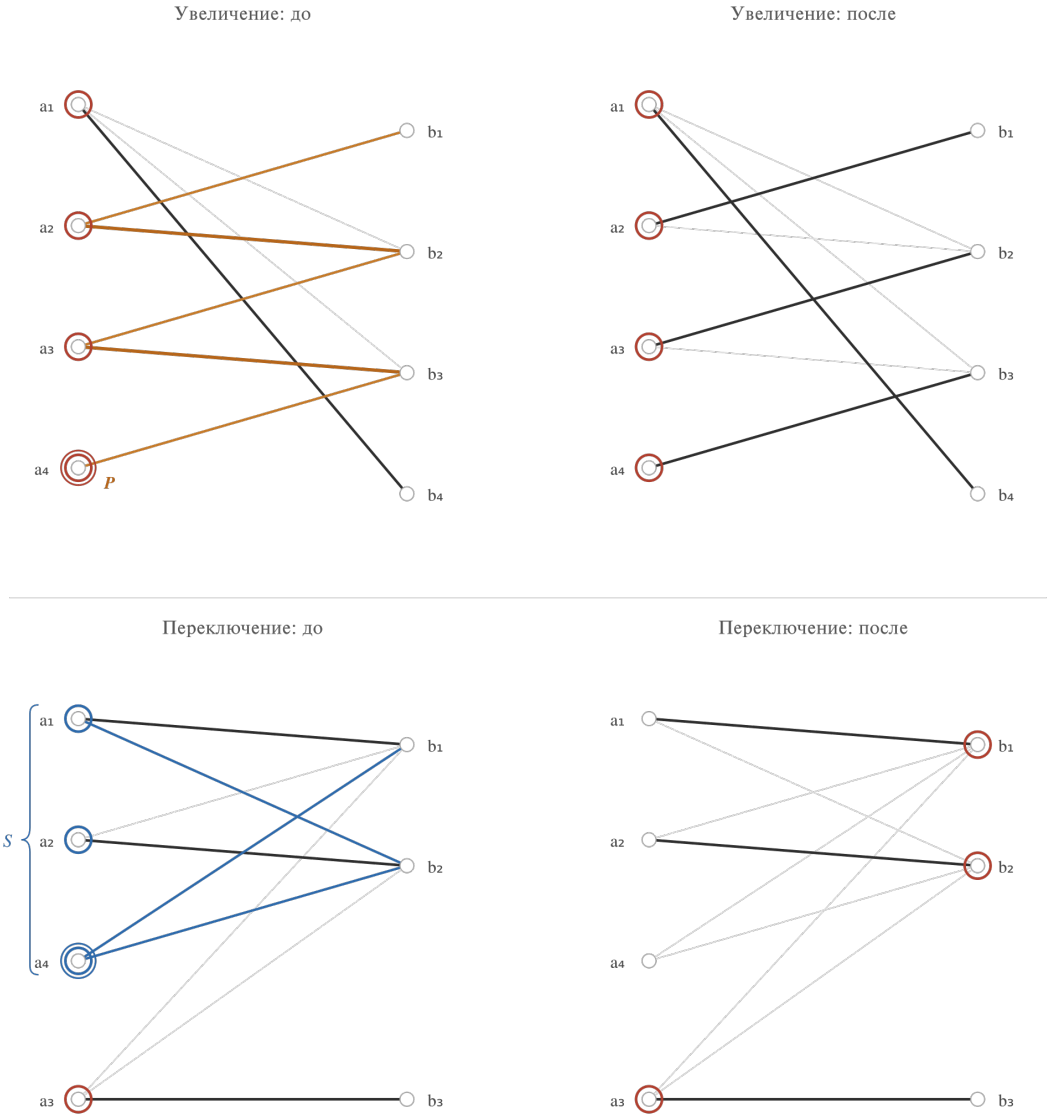
7. Теорема Кенига Докажите, что в двудольном графе выполняется $\nu(G) = \tau(G)$.

8. Для $S \subseteq A$ обозначим $N(S)$ — множество вершин B, смежных хотя бы с одной вершиной из S.

а) Докажите, что $\tau(G) = |A| - \max_{S \subseteq A}(|S| - |N(S)|)$.

б) Докажите, что если $|N(S)| \geqslant |S|$ для всякого $S \subseteq A$, то существует паросочетание, покрывающее A.

в) **Лемма Холла** Если условие Холла выполняется, то существует паросочетание, покрывающее A.



9. Клетки доски $n \times n$ покрашены в черный и белый, причем в каждой строке и каждом столбце закрашено r клеток. Докажите, что на закрашенные клетки можно поставить n ладей, чтобы они не били друг-друга.

10*. Рассмотрим множество X из n элементов. а) Докажите, что все подмножества X можно разбить на $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ последовательностей, в которых каждое следующее подмножество содержит предыдущее.
б) Какое наибольшее число подмножеств X можно выбрать, чтобы ни одно из них не содержалось в другом?
в) Функция f из подножеств X в $\{0,1\}$, монотонна, если из $Y \subseteq Z$ следует $f(Y) \leqslant f(Z)$. Докажите, что

$$2 + 2^m < \text{ число монотонных функций } < 2 + n^m, \text{ где } m = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

11. Перманент квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ это число $\operatorname{per} A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma_1} \cdot a_{2\sigma_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma_n}$. Докажите, что перманент неотрицательной матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда найдутся k строк и $n - k + 1$ столбцов, на пересечении которых все элементы нулевые.