

Задача о соединении вершин

В. В. Хацкевич

§ 1. Постановка задачи

В «Математическом просвещении», сер. 3, вып. 16 (2012), с. 231, опубликована следующая

Задача 16.10. Дан выпуклый n -угольник. Двое по очереди проводят его стороны или диагонали. Запрещается проводить отрезок, имеющий общую точку с ранее проведёнными (в том числе и общий конец). Проигрывает тот, кому некуда ходить. При каких n выигрывает начинающий?

(Отметим, что если у проводимых отрезков разрешить общие концы, то игра закончится построением триангуляции многоугольника и число ходов, а стало быть и исход игры, не будет зависеть от стратегии.)

Для чётного n решение очевидно — выигрывает первый, своим ходом разделив многоугольник на две части с равным количеством вершин, а дальше играя симметрично второму. Но в случае нечётного n решение задачи требует построения соответствующей теории. Причём оказывается, что главное — правильно заданный вопрос об исходе игры: нужно спросить не кто выигрывает, а какой *номер* у игры (определение см. ниже).

Представим необходимые определения и теоретические результаты. Подробнее см. [1–4].

§ 2. Сумма игр

Разберём несколько примеров игр.

ПРИМЕР 2.1. Есть 2 кучки из 5 и 6 камней соответственно. Два игрока по очереди берут от 1 до 3 камней из любой кучки, где количество камней ненулевое. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

В этой задаче выигрышная стратегия очевидна: первый игрок своим ходом уравнивает кучки, а дальше ходит симметрично второму,

т. е. если второй взял камни из первой кучки, то первый возьмёт столько же камней из второй кучки и наоборот.

Пример 2.2. Есть клетчатая доска 5×5 . В правом верхнем углу стоит король, который может ходить либо на одну клетку вниз, либо на одну клетку влево. Два игрока по очереди двигают короля. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

В этой игре выигрышная стратегия есть у второго: если первый сходил влево, то нужно подвинуть короля вниз, и наоборот.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Суммой игр H и G называется такая игра $H + G$, в которой игроки делают очередной ход либо в игре H , либо в игре G . Каждый игрок каждый раз выбирает, в какой игре сделать ход.

Теперь сложим игры из первого и второго примеров и попытаемся понять, кто выиграет.

На этот вопрос не так сложно дать ответ: победит первый, так как он сперва ходит в первой игре и уравнивает две кучки, а в дальнейшем будет ходить в той же игре, что и второй, тем самым обеспечив себе победу.

Но что если будет не 2 кучки, а 3, 4, ..., n ? Или в каждой кучке будет произвольное количество камней? На данный вопрос уже сложно сходу ответить, так как может победить как первый, так и второй игрок (если, к примеру, будет 2 кучки по 5 камней).

§ 3. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Равноправной (или беспристрастной) игрой* мы называем ориентированный (не обязательно конечный) ациклический граф. Его вершины — позиции (состояния) игры, а рёбра — ходы игроков. При этом каждый из игроков может перейти по любому ребру, начало которого отвечает текущей позиции.

Например, шахматы не являются симметричной игрой — нельзя ходить чужой фигурой.

Далее мы рассматриваем только равноправные игры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовём игру H *нулевой*, если в этой игре есть выигрышная стратегия у второго игрока. В противном случае будем говорить, что игра *ненулевая*.

Ясно, что сумма произвольного количества нулевых игр — нулевая игра: второй игрок каждый раз ходит в той же игре, что и первый. Аналогично доказывается, что если взять ненулевую игру и произвольное количество нулевых игр, то первый выигрывает.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим пример, приведённый выше. Игра с двумя кучками — ненулевая, игра с королём — нулевая, и сумма этих двух игр — ненулевая игра.

Оказывается, игры можно не только складывать, но и сравнивать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Назовём игры G_1 и G_2 эквивалентными, если для любой игры H исход игры $H + G_1$ совпадает с исходом игры $H + G_2$.

Имеется равносильное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4'. Две игры называются эквивалентными, если их сумма — нулевая игра.

Несложно убедиться, что все проигрышные для начинающего (т. е. нулевые) игры эквивалентны между собой. Однако игры, выигрышные для начинающего, уже могут быть неэквивалентными.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим две игры.

1) Дана кучка из 8 камней. Разрешено брать 1, 2, 3 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

2) Дана доска 3×3 . В правом верхнем углу стоит фишка, которую разрешено двигать либо вниз, либо влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Сумма этих игр — нулевая игра, так как в первой игре второй игрок берёт 4 минус количество камней, которое взял первый, а во второй игре второй игрок играет симметрично первому.

Пока непонятно, как складывать произвольное количество ненулевых игр. И здесь, на удивление, нам помогут палочки Ним!

§ 4. Игра Ним

В игре Ним используется несколько кучек из палочек. Два игрока по очереди выбирают кучку и убирают из неё ненулевое количество палочек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовём игру Ним с одной кучкой из n палочек элементарной ним-игрой, а число n — её ним-числом.

Если некоторая игра G эквивалентна элементарной игре с n палочками, то мы говорим, что игра G имеет номер¹⁾ $*n$.

Теперь сложим игры с номерами $*n$ и $*m$. Понятно, что если $n = m$, то игра нулевая, а иначе не нулевая (так как первый игрок своим ходом уравнивает две кучки, тем самым обеспечив себе победу). Но какая

¹⁾ По-английски nimber. Термины введены по аналогии с «номер» и «number».

игра равна сумме этих двух игр? Обозначим её номер $*C$ и попробуем найти C для $n = 1$ и $m = 2$.

$C = 0$ не подходит, так как первый своим ходом выравнивает кучки, тем самым обеспечивая себе победу.

$C = 1$ не подходит, так как первый своим ходом убирает кучку с 2 палочками.

$C = 2$ не подходит, так как второй своим ходом убирает кучку с 1 палочкой.

$C = 3$ подходит, так как второй при любом ходе первого сможет оставить 2 кучки с одинаковым количеством палочек, то есть создать нулевую игру.

А если $n = 20$, $m = 15$? Что делать в общем случае?

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Ним-число суммы двух элементарных ним-игр равно побитовой исключающей дизъюнкции (XOR) их ним-чисел.*

Побитовая исключающая дизъюнкция для одноразрядных двоичных чисел определяется так, обозначение $\oplus$:

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1.$$

В многоразрядном двоичном числе разряды складываются независимо. Представим, например, числа 7 и 13 в двоичной системе счисления: $7 = 0111$, $13 = 1101$. Тогда $7 \oplus 13 = 1010$, что соответствует в десятичной системе счисления числу 10.

Теперь докажем утверждение 1.

Доказательство. Пусть даны две кучки из n и m палочек. Можно считать, что $n \neq m$. Добавим третью кучку из $n \oplus m$ палочек. Нужно доказать, что в игре с этими тремя кучками побеждает второй игрок.

Заметим, что если XOR-сумма всех трёх ним-чисел перед очередным ходом первого игрока равна нулю, то после этого хода она нулю не равна, так как первый игрок убирает ненулевое число палочек и у этого числа некоторый бит не равен нулю.

Если же XOR-сумма трёх кучек не равна нулю перед ходом второго игрока, то второй игрок может сделать её равной нулю. Для этого он находит в XOR-сумме (обозначим её s) самый старший бит (с некоторым номером d), равный 1. Найдётся кучка с таким количеством палочек (обозначим его x), у которого d -й бит тоже равен 1. Тогда второй игрок оставляет в этой кучке $x \oplus s$ палочек. Ход корректен, так как это число неотрицательно и меньше, чем x : бит с номером d у него равен нулю, а старшие биты у x и $x \oplus s$ одинаковы. Нетрудно видеть, что теперь XOR-сумма трёх кучек равна нулю, что и требовалось.

Заметим, что вначале XOR-сумма трёх кучек равна нулю. Значит, после хода первого игрока она станет ненулевой, второй игрок снова сделает её нулевой, и т. д. Так как в конце она равна нулю, последний ход сделан вторым игроком. $\square$

§ 5. ТЕОРЕМА ШПРАГА — ГРАНДИ

Но как умение складывать палочки поможет складывать игры?

Пусть дана игра на графе G . Определим значение функции Шпрага — Гранди F рекурсивно.

Пусть $G(x)$ — множество позиций, достижимых из позиции x ходом первого. Пусть для каждого $y \in G(x)$ величина $F(y)$ уже определена. Определим величину $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \text{mex}(\{F(y) \mid y \in G(x)\}).$$

Здесь $\text{mex}(S)$ равно минимальному неотрицательному числу, не содержащемуся в множестве S .

УПРАЖНЕНИЕ. Воспользовавшись тем, что игра всегда конечна, докажите, что это определение корректно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательства по индукции встречаются часто. Несколько реже встречаются *индуктивные определения*. В данном случае индуктивным параметром служит *максимальное число ходов*, за которое может кончиться данная игра.

ТЕОРЕМА ШПРАГА — ГРАНДИ. *Любая конечная равноправная игра эквивалентна некоторой элементарной ним-игре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Даны игра G и некоторая позиция x . Рассмотрим множество $G(x)$ из определения функции Шпрага — Гранди. Предположим, что каждая игра G_i , начинающаяся в позиции из этого множества, эквивалентна некоторой ним-игре с n_i палочками. Пусть $t = \text{mex}\{n_i\}$. Покажем, что игра G эквивалентна элементарной ним-игре с t палочками. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Первый игрок сделал ход в кучке из t палочек, получив Ним из $t' < t$ палочек. Тогда второй игрок имеет возможность, сделав ход в G , получить игру, также эквивалентную Ниму из t' палочек.

Случай 2. Первый игрок сделал ход в игре G и получил игру, эквивалентную Ниму из $t' < t$ палочек. Тогда второй игрок уменьшает добавленную кучку из t палочек до t' , и снова имеются две эквивалентные игры.

Чуть более интересен

Случай 3. Первый игрок сделал ход в игре G и получил игру, эквивалентную Ниму из $t'' > t$ палочек. (Равенство $t'' = t$ невозможно в силу определения t). Тогда второй игрок может перейти из этой игры в игру, эквивалентную Ниму из $t < t''$ палочек, и опять имеются две эквивалентные игры.

Теперь возьмём всё множество финальных позиций игры G и обозначим номер каждой из них через $*0$.

Затем возьмём множество позиций, которые переходят только в позиции с $*0$, и присвоим им значение номера, равное $*1$. Из доказанного выше следует, что игра, которая начинается с этой позиции, эквивалентна Ниму с одной палочкой.

Будем повторять такой процесс до тех пор, пока не дойдём до начальной позиции игры. Это можно сделать, поскольку игра конечна и представима в виде ациклического графа. Теорема доказана. $\square$

Доказав теорему Шпрага — Гранди, мы видим, что сложение конечных равноправных игр сводится к сложению ним-игр. Вернёмся к исходной задаче 16.10.

§ 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СОЕДИНЕНИИ ВЕРШИН

В задаче 16.10 дан выпуклый n -угольник. Ход первого приводит к появлению двух частей, а именно выпуклых k - и $n - k - 2$ -угольников. Дальнейшие ходы в каждом из них осуществляются независимо, соответствующие игры суммируются. При этом 0, 1, 2-угольники тоже рассматриваются, их номера равны 0, 0, 1. Это означает, что всевозможные позиции, достижимые из начальной позиции игры, имеют номера $(n - 2) \oplus 0$, $(n - 3) \oplus 1$, ...

Ясно, что наша игра является равноправной и конечной. Применим теорему Шпрага — Гранди.

Обозначим через $N(x)$ номер, который имеет данная позиция x (где x — количество вершин в используемом многоугольнике). Тогда, используя функцию Шпрага — Гранди, получим

$$N(x) = \text{mex} \{N(x-2) \oplus N(0), N(x-3) \oplus N(1), \dots\}.$$

Если $N(x) = *0$, то проигрывает первый игрок, иначе второй. А выигрышная стратегия такая же, как и в игре Ним: нужно ходить в позицию с нулевой XOR-суммой.

Задача решена, но если реализовать вычисление этой рекуррентной функции на компьютере по наивному алгоритму, то асимптотиче-

ская сложность вычисления будет $O(n^2)$, где n — количество вершин. Может быть, есть способ решить эту задачу быстрее? Оказывается, чтобы определить, кто выиграет при конкретном n (т. е. посчитать нимер), потребуется время $O(1)$.

Первые 188 нимеров (начиная с 1-угольника) были получены с помощью компьютера:

(0 1 1 2 0 3 1 1 0 3 3 2 2 4 0 5 2 2 3 3 0 1 1 3 0 2 1 1 0 4 5 2 7 4 0 1 1 2
0 3 1 1 0 3 3 2 2 4 4 5 5 2) (3 3 0 1 1 3 0 2 1 1 0 4 5 3 7 4 8 1 1 2 0 3 1 1
0 3 3 2 2 4 4 5 5 9) (3 3 0 1 1 3 0 2 1 1 0 4 5 3 7 4 8 1 1 2 0 3 1 1 0 3 3 2
2 4 4 5 5 9) (3 3 0 1 1 3 0 2 1 1 0 4 5 3 7 4 8 1 1 2 0 3 1 1 0 3 3 2 2 4 4 5
5 9) (3 3 0 1 1 3 0 2 1 1 0 4 5 3 7 4 8 1 1 2 0 3 1 1 0 3 3 2 2 4 4 5 5 9) ...

Видно, что эта последовательность содержит предпериод длиной 52 и период длиной 34, повторенный четырежды. На самом деле период будет повторяться до бесконечности. Действительно, пусть $S(n)$ — множество значений, к которому мы применяем функцию тех в позиции n . Нам нужно доказать, что $S(n) = S(n + 34)$ для произвольного $n > 52$. Компьютерное вычисление подтверждает это для $n = 53, \dots, 86$. Пусть $n > 86$ и для всех k , $52 < k < n$, выполнено равенство $S(k) = S(k + 34)$. Тогда

$$\begin{aligned} S(n + 34) &= \{G(n + 32) \oplus G(0), G(n + 31) \oplus G(1), \dots\} = \\ &= \{G(n - 2) \oplus G(0), G(n - 3) \oplus G(1), \dots\} = S(n), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Таким образом, у второго игрока есть выигрышная стратегия при $n = 1, 5, 9, 15, 21, 25, 29, 35, 39, 43$ и при $n > 52$, дающих следующие остатки при делении на 34: 5, 9, 21, 25, 29. При остальных n выигрышная стратегия есть у первого игрока.

§ 7. Выводы

Этот пример иллюстрирует важность, с одной стороны, применения компьютера в доказательствах, а с другой — теоретического осмысления задачи²⁾. Порой, чтобы решить задачу, главное — задать *правильный вопрос*, и примером этому служит задача о соединении

²⁾ Чему не уделяется должного внимания при подготовке к олимпиадам. Подробнее см. Ковальджи А. К., Канель-Белов А. Я. Занятия по математике — листки и диалог // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 19. М.: МЦНМО, 2015. С. 206–233. — Прим. ред.

вершин, где правильный вопрос таков: какой номер у игры? А не просто кто выигрывает?

БЛАГОДАРНОСТИ

Хотелось бы выразить большую благодарность А. Я. Канель-Белову за помощь при подготовке этой статьи и М. Л. Нелимову за помощь в освоении материала и за рекомендацию соответствующей литературы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Деорнуа П. Комбинаторная теория игр. М.: МЦНМО, 2017.
- [2] Фролов И. Введение в теорию комбинаторных игр: Учебное пособие. https://xity.narod.ru/comb/Frolov_Combinatorial_Games.pdf.
- [3] Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики. М.: МЦНМО, 2022.
- [4] Conway J. H. On numbers and games / 2nd ed. Natick, MA: A K Peters, 2001.